Introdução ao Estudo de Sistemas Lineares

Gustavo Henrique Silva Alencar Luna

1. Definições.

1.1 Equação linear é toda sentença aberta, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, ..., x_n, do tipo $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + ... + a_n \cdot x_n = b$, em que a_1, a_2, a_3, ..., a_n são os coeficientes reais das incógnitas e b é o termo real independente.

1.2 Solução de uma equação linear é toda ênupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ que torna verdadeira a sentença $a_1 \cdot \alpha_1 + a_2 \cdot \alpha_2 + a_3 \cdot \alpha_3 + ... + a_n \cdot \alpha_n = b$.

1.3 Sistema linear é todo conjunto de duas ou mais equações lineares. A representação de um sistema linear de p equações é expressa da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_n x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

1.4 Solução de um sistema linear é toda ênupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ que torna todas as equações lineares desse sistema sentenças verdadeiras, ou seja, que seja solução de cada uma das equações lineares do sistema.

1.5 Classificação dos sistemas lineares quanto ao número de soluções:

1.5.1 O sistema será possível se admitir pelo menos uma solução.

1.5.2 O sistema será impossível se não admitir nenhuma solução.

1.5.3 O sistema possível será determinado se possuir uma única solução.

1.5.4 O sistema possível será indeterminado se possuir infinitas soluções.

2. *Matrizes associadas a um sistema linear.*

2.1 Matriz incompleta, representada por *MI*, é a matriz que tem, ordenadamente, como elementos os coeficientes reais das incógnitas.

Ex.: no sistema linear $\begin{cases} 2x + y - 5z = 3 \\ x + 2y + z = 2 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$, a matriz incompleta é:

$$MI = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2 Matriz completa, representada por *MC,* é a matriz que apresenta, ordenadamente, os elementos de *MI* e uma coluna formada pelos elementos dos segundos membros de cada uma das equações lineares.
Ex.: a partir do sistema do exemplo anterior, pode-se concluir que a matriz completa a ele associada é:

$$MI = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3 Determinante do sistema (*D*) é o determinante de *MI*, se, obviamente, tal matriz for quadrada.

3. *Sistema Normal*

3.1 Definição: sistema normal é todo sistema de n equações e de n incógnitas que apresenta determinante do sistema não nulo ($D \neq 0$).

3.2 Teorema de Cramer: todo sistema normal é possível e determinado.
Há, pelo menos, dois métodos práticos de demonstrar o Teorema de Cramer. Um deles é feito através de igualdade matricial que revela a unicidade que permite classificar o sistema como possível e determinado; o outro se dá através do Teorema de Rouché-Capelli, ainda não explicado. Supondo que o leitor tenha conhecimento prévio de equações matriciais e que saiba que

todo sistema linear pode ser expresso através de uma equação matricial, podemos demonstrar o teorema supracitado do seguinte modo:

Se $MI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\det MI = D \neq 0$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (matriz das incógnitas) e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ (matriz dos termos independentes), então:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow MI \cdot X = B \Leftrightarrow MI^{-1} \cdot MI \cdot X = MI^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \boxed{X = MI^{-1} \cdot B}$$

A condição de $\det MI = D \neq 0$, que caracteriza o sistema normal, garante que MI^{-1} (a inversa da matriz incompleta) existe e é única, o que também permite garantir a existência e a unicidade de $X = MI^{-1} \cdot B$. Como existe uma única ênupla $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ como solução, o sistema é, portanto, possível e determinado.

3.3 Regra de Cramer: é um método de determinar a solução de um sistema normal. É importantíssimo não confundir tal regra com o Teorema de Cramer, já tratado. O teorema é tão-só uma afirmação, enquanto que a regra é um método de resolução de sistemas normais que se baseia no que diz o teorema. A partir dessa regra, descobrimos cada elemento da ênupla do seguinte modo:

$$x_1 = \frac{D_1}{D};\ x_2 = \frac{D_2}{D};\ x_3 = \frac{D_3}{D};\ \dots;\ x_j = \frac{D_j}{D};\ \dots;\ x_n = \frac{D_n}{D},$$

em que $D \neq 0$ é o determinante do sistema e D_j é o determinante da matriz que é obtida da matriz incompleta, substituindo-se a j-ésima coluna

$(a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, ..., a_{nj})$ pela coluna da matriz dos termos independentes $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$, ordenadamente.

4. Característica de uma matriz

4.1 Introdução: os sistemas lineares, como já estudamos, podem ser classificados de acordo com o número de soluções que apresentam. É importante, portanto, antes de tentar resolver um sistema, saber se ele admite solução. Julgar um sistema linear aignifica classificá-lo de acordo com o número de soluções. Quando, em um sistema linear, há um parâmetro real, podem-se discutir os possíveis valores desse parâmetro de modo que o sistema possa ser classificado como possível (determinado ou indeterminado) ou impossível. Um dos métodos existentes, para julgar e discutir um sistema linear, é o Teorema de Rouché-Capelli. Para que possamos entendê-lo, é necessário conhecermos o conceito de característica de matriz, que, a partir de agora, terá grande importância no nosso estudo.

4.2 Definição: característica de uma matriz A é o valor da máxima ordem dos determinantes não todos nulos de submatrizes de A, que equivalem a matrizes quadradas extraídas de A, orlando-se linhas e colunas. O Teorema de Kronecker define característica de matriz da seguinte maneira:
A característica de uma matriz é o número natural p ($p \geq 1$) se, e somente se, existir um determinante (D_p) não nulo de uma submatriz de ordem p e forem nulos todos os determinantes de submatrizes de ordem $p+1$, que podem ser obtidos orlando-se D_p com uma das colunas restantes e com uma das linhas restantes.

Ex.: Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 15 & 0 \end{pmatrix}$, para se determinar a característica p dessa matriz através do Teorema de Kronecker, têm-se de começar a determinar os valores dos determinantes das menores submatrizes. Por exemplo:

1.º) $|5| = 5 \neq 0 \Rightarrow p \geq 1$

Temos, então, de verificar se há submatrizes de maior ordem que apresentam determinante diferente de zero. Orlando-se a submatriz anterior, ou seja, copiando filas (linhas e colunas) em torno dela, temos:

2.º) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow p \geq 2$

Repetimos o procedimento para submatrizes de maior ordem.

3.º) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 7 & 15 \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p = 2$

Obs.: se pelo menos uma submatriz de ordem 3 apresentasse determinante diferente de zero, a característica p seria 3.

5. ***Discussão de sistemas lineares através do Teorema de Rouché-Capelli.***

5.1 Introdução: a discussão de sistemas lineares sempre gerou certa polêmica entre os estudantes, principalmente quanto aos métodos usados para discuti-lo. A maioria dos livros-texto brasileiros, infelizmente, ainda propaga a falsa idéia de que a Regra de Cramer é o melhor método de discussão de sistemas lineares. Como já explicamos, tal regra é apenas uma ferramenta de resolução de sistemas normais, não tendo a mínima razão de ser aplicada na discussão de sistemas lineares quaisquer. Algumas pessoas, entretanto, perguntam-me por que essa regra funciona em muitos casos de discussão. Ora, os casos em que o uso dessa regra fornece a resposta correta são justamente aqueles em que tal pseudo-artifício *coincide* com o Teorema de Rouché-Capelli (que será explicado adiante). Esse uso equivocado da Regra de Cramer também apresenta algumas limitações, visto que só pode ser usada em sistemas que apresentam matriz incompleta quadrada. Um exemplo clássico que comprova a falibilidade do uso de tal regra para discutir sistemas é dado abaixo:

Discutindo-se o sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$, através da Regra de Cramer, teríamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = D_z = 0$$

Para cada valor das incógnitas, teríamos a indeterminação $x = y = z = \frac{0}{0}$, que informa que o sistema é possível e indeterminado e, portanto, apresenta infinitas soluções. Essa conclusão é, entretanto, absurda, visto que, obviamente, não há três números reais x, y e z cuja soma seja 1, 2 e 3 *ao mesmo tempo*. Está claro que o sistema linear apresentado é *impossível*, fato que seria confirmado se o discutíssemos através do Teorema de Rouché-Capelli.

5.2 Definição: o Teorema de Rouché-Capelli exige do estudante o conhecimento de característica de matriz e do Teorema de Kronecker, assuntos já explicados. Consideremos o sistema linear S abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_n x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O sistema apresenta m equações e n incógnitas. Seja p a característica da matriz incompleta (MI), e q, a característica da matriz completa (MC), o Teorema de Rouché-Capelli afirma as seguintes equivalências:

$p \neq q \Leftrightarrow S$ é impossível.
$p = q < n \Leftrightarrow S$ é possível e indeterminado.
$p = q = n \Leftrightarrow S$ é possível e determinado.

Ex$_1$.: comprovaremos, através do teorema apresentado, que o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$ é impossível.

É bem claro perceber que a característica da matriz incompleta (p) é igual a 1; a característica da matriz completa (q) é, entretanto, igual a 2, visto que essa matriz apresenta pelo menos uma submatriz de ordem 2 cujo determinante é diferente de zero. Por exemplo, há esse determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Como $p \neq q$, o sistema é *impossível*.

Ex$_2$.: (FATEC) – Os números reais a e b tornam o sistema

$$\begin{cases} 2x+2y-z=2 \\ 2x-ay+4z=12 \\ 3x+3y-2z=b \end{cases}$$ indeterminado em $\mathbb{R}$. Então:

a) $a+b=4$
b) $a+b=-4$
c) $a+b=18$
d) $a+b=-18$
e) $a+b=0$

Resolução: para que o sistema seja possível e indeterminado, segundo Rouché-Capelli, tem-se que $p=q<3$, sabendo que há três incógnitas. É necessário que todas as submatrizes de ordem 3 apresentem, obviamente, determinante nulo. Então:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -a & 4 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -a & 4 & 12 \\ 3 & -2 & b \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto, $a=-2$ e $b=2$. Logo, $\boxed{a+b=0}$.

6. Outros métodos de resolução de sistemas lineares.

6.1 Introdução: a rigor, só podemos resolver sistemas possíveis e determinados. Obviamente, antes de resolvermos um dado sistema linear, é necessário sabermos se ele apresenta uma única solução (SLPD). Para tanto, podemos fazer a verificação através do Teorema de Rouché-Capelli. Se o sistema for normal, poderemos resolvê-lo, como já foi dito, através da Regra de Cramer. A resolução por esse método, às vezes, pode ser bastante cansativa, principalmente nos casos em que a matriz incompleta possui ordem maior que três, visto que teríamos de calcular, no mínimo, cinco determinantes de 4.ª ordem e outros determinantes menores. Em tais casos, é mais confortável e rápido utilizarmos o método do escalonamento, que traz consigo algumas propriedades matriciais que são aplicadas à resolução de sistemas e já devem ser conhecidas pelo leitor. É também possível resolvermos sistemas lineares indeterminados, tendo em mente que teremos de expressar a solução do sistema em função de um ou mais parâmetros reais, que equivalem a algumas das incógnitas, escolhidas arbitrariamente.

6.2 Resolução de sistema linear possível e determinado ($p = q = n$).

6.2.1 Se o sistema for normal:
Pode-se utilizar, normalmente, a Regra de Cramer ou outro método qualquer.

6.2.2 Se o sistema não for normal:
Se o sistema apresentar número de incógnitas (n) menor que o número de equações (m), devemos abandonar $m - n$ equações apropriadas de modo a obtermos um novo sistema, que será normal. A partir de então, podemos aplicar a Regra de Cramer ou outro método mais conveniente.

6.3 Resolução de sistema linear possível e indeterminado ($p = q < n$).
Para obtermos as infinitas soluções de um sistema indeterminado, devemos considerar algumas incógnitas como parâmetros reais e fornecer a solução geral do sistema em função destes. O número de incógnitas que passarão aos segundos membros das equações lineares é determinado pelo *grau de indeterminação*, que equivale a $n - p$, a diferença entre o número de incógnitas e a característica da matriz incompleta.

6.4 Escalonamento

6.4.1 Sistemas equivalentes são aqueles que possuem o mesmo conjunto-solução. Pode-se obter, a partir de um dado sistema linear, um equivalente mais simples, se:

a) permutarmos duas equações.

b) multiplicarmos qualquer uma das equações lineares por um número real não nulo.

c) multiplicarmos uma das equações lineares por um número real não nulo e adicionarmo-lo à outra equação (extensão do Teorema de Jacobi, visto que, expressando o sistema linear através de uma equação matricial, podemos realizar combinações lineares das filas paralelas sem alterarmos o determinante do sistema e, obviamente, a ênupla ordenada tida como solução).

6.4.2 Sistema escalonado é todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}\cdot x_3 + \ldots + a_{3n}\cdot x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

a) A resolução de um sistema escalonado se dá, facilmente, por substituição, através da última equação linear.

b) Todo sistema escalonado pode ser facilmente discutido por meio da sua última equação linear ($a_{nn}\cdot x_n = b_n$).

c) Podemos obter um sistema escalonado a partir das transformações descritas no item 6.4.1, de modo a obtermos sucessivos sistemas equivalentes mais simples.

7. ***Sistema homogêneo***

7.1 Uma equação linear será homogênea se, e somente se, apresentar o termo independente igual a zero ($b = 0$).

7.2 Um sistema linear será homogêneo se, e somente se, apresentar todos os termos independentes nulos ($b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0$), ou seja, se todas as equações lineares que o constituem forem homogêneas.

7.3 Todo sistema linear homogêneo de n incógnitas admite como solução a ênupla $(0,0,0,...,0)$, que recebe o nome de solução trivial ou imprópria. Quando existem, as demais soluções são chamadas de não-triviais ou próprias.

7.4 Todo sistema linear homogêneo é possível, visto que a característica da matriz incompleta (p) é sempre igual à da matriz completa (q).

7.5 Se $p = n$, o sistema linear homogêneo admite apenas a solução trivial.

7.6 Se $p < n$, o sis tema linear homogêneo é indeterminado, admitindo outras soluções, além da trivial.

8. Exercícios Propostos

E.P.01) (PUC) Considere o seguinte sistema de equações de incógnitas x e y

$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$. Esse sistema tem uma única solução para certo número real k, que é um:

a) quadrado perfeito.

b) número primo.

c) número racional não-inteiro.

d) número negativo.

e) múltiplo de 5.

E.P.02) (UFC) Encontre o número real m de modo que as retas $x + y = 8$, $2x - 3y = 6$ e $5x + my = 3$ passem por um mesmo ponto.

E.P.03) (UECE) Em uma grande garagem estão estacionados bicicletas (duas rodas) e automóveis (quatro rodas), totalizando 118 rodas. Se a quantidade de bicicletas é menor do que a quantidade de automóveis e se ambas as quantidades são números primos, então o número de bicicletas na garagem é:

a) 7

b) 13

c) 17

d) 23

E.P.04) (Unicamp) Seja dado sistema linear: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$.

a) Mostre graficamente que esse sistema não tem solução. Justifique.

b) Para determinar uma solução aproximada de um sistema linear $Ax = b$ impossível, utiliza-se o método dos quadrados mínimos, que consiste em resolver o sistema $A^T Ax = A^T b$. Usando esse método, encontre uma solução aproximada para o sistema dado acima. Lembre-se de que as linhas de M^T (a transposta de uma matriz M) são iguais às colunas de M.

E.P.05) (FGV-2008) considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x + y = -13 \\ x + y = k \end{cases}$$

de incógnitas x e y e parâmetro k. Para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter:

a) $k = -7$

b) $k \neq -7$

c) k é um número real qualquer.

d) $k > -3$

e) O sistema nunca será possível e indeterminado.

E.P.06) (PUC-2008) Uma pessoa tem apenas x moedas de 5 centavos, y moedas de 10 centavos e z moedas de 25 centavos. A equação matricial seguinte permite determinar as possíveis quantidades dessas moedas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Com base nesses dados, é correto afirmar que:

a) há exatamente 7 possibilidades de solução para essa equação.

b) não podem existir dois tipos de moedas distintas em quantidades iguais.

c) os três tipos de moedas totalizam a quantia de R$ $78,00$.

d) se o número de moedas de 10 centavos fosse 4, o problema admitiria uma única solução.

e) o número de moedas de 25 centavos deve ser menor do que 5.

Gabarito:

E.P.01)	Letra *a*	E.P.04)	Gráfico; $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$
E.P.02)	$m=-\frac{27}{2}$	E.P.05)	Letra e
E.P.03)	Letra *b*	E.P.06)	Letra *a*

Gráfico: